INTORNO AI MOMENTI GEOMETRICI

DI PRIMO GRADO

NOTA PRIMA

PER

G. BATTAGLINI

L' oggetto della presente Nota è di stabilire i principii della teoria meccanica dei Momenti, indipendentemente dalla considerazione delle forze.

1. In un sistema di 1ª specie (sistema di piani condotti per una retta, o pure di rette giacenti in un piano e concorrenti in un punto) sia determinata la posizione dell'elemento ω, rispetto a due elementi fondamentali α e β, dall'equazioni

$$x = \frac{\operatorname{sen} \alpha\omega}{\operatorname{sen} \alpha\beta}, \qquad y = \frac{\operatorname{sen} \beta\omega}{\operatorname{sen} \beta\alpha};$$

essendo per due elementi ω_i, ω_j del sistema,

$$\operatorname{sen} \omega_i\omega_j \operatorname{sen} \alpha\beta = \operatorname{sen} \alpha\omega_i \operatorname{sen} \beta\omega_j - \operatorname{sen} \beta\omega_i \operatorname{sen} \alpha\omega_j ,$$

sarà

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \operatorname{sen} \omega_i\omega_j &= (y_i x_j - x_i y_j) \operatorname{sen} \alpha\beta , \\ \cos \omega_i\omega_j &= x_i x_j + y_i y_j + (y_i x_j + x_i g_j) \cos \alpha\beta , \end{aligned}$$

e tra le coordinate (x, y) di ω si avrà la relazione

$$\text{(1)} \qquad x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha\beta = 1 ,$$

Supponiamo *annesso* ad ogni elemento del sistema un coefficiente, il

quale potrà rappresentare una quantità qualunque; indicando con μ_i il coefficiente annesso all'elemento ω_i, l'espressione

$$M_{ik}=\mu_i \operatorname{sen} \omega_i \omega_k=\mu_i(y_i x_k-x_i y_k)\operatorname{sen}\alpha\beta ,$$

si dirà *il momento del coefficiente μ_i rispetto all'elemento ω_k*, o l'espressione

$$M_k=\Sigma\mu_i \operatorname{sen} \omega_i \omega_k=\Sigma\mu_i(y_i x_k-x_i y_k)\operatorname{sen}\alpha\beta ,$$

in cui il Σ si estende a tutti gli elementi che si considerano nel sistema, sarà *la somma dei momenti dei coefficienti del sistema rispetto ad ω_k*.

Si ponga

$$\mu x=\Sigma\mu_i x_i , \quad \mu y=\Sigma\mu_i y_i ; \tag{2}$$

essendo

$$\mu^2 x^2=\Sigma\mu_i^2 x_i^2+2\Sigma\mu_i\mu_j x_i x_j , \quad \mu^2 y^2=\Sigma\mu_i^2 y_i^2+2\Sigma\mu_i\mu_j y_i y_j ,$$

$$\mu^2 xy=\Sigma\mu_i^2 x_i y_i+\Sigma\mu_i\mu_j(y_i x_j+x_i y_j) ,$$

si avrà per le relazioni (1)

$$\mu^2=\Sigma\mu_i^2+2\Sigma\mu_i\mu_j\cos\omega_i\omega_j . \tag{3}$$

Il valore di μ dato dall'equazione (3) si dirà il coefficiente *risultante* del sistema, rispetto ai coefficienti μ_i, che ne saranno i coefficienti *componenti*.

Per le relazioni (2) l'espressione di M_k diventa

$$M_k=\mu(y x_k-x y_k)\operatorname{sen}\alpha\beta=\mu \operatorname{sen}\omega\omega_k ,$$

sicchè supposto il coefficiente μ annesso all'elemento ω, si avrà che *in un sistema di 1ª specie di elementi, con annessi coefficienti, vi è sempre un elementa col corrispondente coefficiente tale, che il suo momento, rispetto ad un elemento qualunque del sistema, è eguale alla somma dei momenti degli altri dati coefficienti*. Si esprimerà questa proprietà dicendo che *il momento del coefficiente risultante è eguale alla somma dei momenti dei coefficienti componenti*.

L'elemento ω cui è annesso il coefficiente risultante si dirà l'elemento *risultante*.

Se ω' ed ω'' sono gli elementi risultanti in due sistemi di coefficienti

$\mu'_{,}$, $\mu''_{,}$ annessi agli elementi $\omega'_{,}$, $\omega''_{,}$, e che hanno per coefficienti risultanti μ' e μ'', essendo

$$\mu'x' = \Sigma\mu'_{,}x'_{,} \ , \quad \mu'y' = \Sigma\mu'_{,}y'_{,} \ ; \qquad \mu''x'' = \Sigma\mu''_{,}x''_{,} \ , \quad \mu''y'' = \Sigma\mu''_{,}y''_{,} \ ,$$

si avrà

$$\text{(4)} \qquad \mu'\mu''\,\mathrm{sen}\,\omega'\omega'' = \mu'\mu''(y'x'' - x'y'')\,\mathrm{sen}\,\alpha\beta = \Sigma\mu'_{,}\mu''_{,}\,\mathrm{sen}\,\omega'_{,}\omega''_{,} \ ,$$

il Σ estendendosi a tutte le combinazioni di ciascun elemento $\omega'_{,}$ con ciascun elemento $\omega''_{,}$.

Le quantità $\mu_\alpha = \mu y$, $\mu_\beta = \mu x$, sono i coefficienti *componenti* di μ, annessi agli elementi α e β; tra il coefficiente *risultante* μ, ed i coefficienti componenti μ_α, μ_β si hanno le relazioni

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \mu^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + 2\mu_\alpha\mu_\beta\cos\alpha\beta \ , \\ \mu : \mu_\alpha : \mu_\beta :: \mathrm{sen}\,\alpha\beta : \mathrm{sen}\,\omega\beta : \mathrm{sen}\,\alpha\omega \ . \end{cases}$$

Le formole (2) dimostrano che per *comporre* più coefficienti, basta *decomporre* ciascuno di essi ($\mu_{,}$ annesso ad $\omega_{,}$) nei due coefficienti componenti ($\mu_{,}y_{,}$, $\mu_{,}x_{,}$) annessi agli elementi fondamentali α e β, prendere le somme dei coefficienti annessi a questi elementi fondamentali, e comporre finalmente queste somme ($\Sigma\mu_{,}y_{,} = \mu_\alpha$, $\Sigma\mu_{,}x_{,} = \mu_\beta$) nel coefficiente risultante μ per mezzo delle formole (5), le quali determineranno il valore del coefficiente risultante, e la posizione dell'elemento risultante.

È facile vedere ancora per le formole (2), che per comporre più coefficienti si possono prima distribuire in gruppi, poi comporre i coefficienti di ciascun gruppo, e finalmente comporre i coefficienti risultanti parziali dei diversi gruppi.

Facendo coincidere successivamente l'elemento ω_{ι} con α e β si avrà

$$M_\alpha = \mu x\,\mathrm{sen}\,\beta\alpha \ , \qquad M_\beta = \mu y\,\mathrm{sen}\,\alpha\beta \ ,$$

onde

$$M_{\iota} = y_{\iota}M_\alpha + x_{\iota}M_\beta \ ,$$

o sia

$$\text{(6)} \qquad M_{\iota}\,\mathrm{sen}\,\alpha\beta = M_\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega_{\iota}\beta + M_\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha\omega_{\iota} \ ,$$

laonde conoscendo i momenti M_α, M_β del sistema rispetto agli elementi

fondamentali α e β, si conoscerà per mezzo della formola (6) il momento del sistema rispetto ad ogni oltro elemento ω_k.

In generalo si avrà

$$M_k \operatorname{sen} \omega_i \omega_j = M_i \operatorname{sen} \omega_k \omega_j + M_j \operatorname{sen} \omega_i \omega_k \,, \tag{6}$$

formola che dà la relazione tra i momenti M_i, M_j, M_k del sistema rispetto a tre elementi qualunque ω_i, ω_j, ω_k.

Si troverà inoltre

$$M^2 = \frac{M_i^2 + M_j^2 - 2 M_i M_j \cos \omega_i \omega_j}{\operatorname{sen}^2 \omega_i \omega_j} = \mu^2 \,, \tag{7}$$

sicchè la quantità M è costante, ed eguale al coefficiente risultante, qualunque sia la coppia degli clomenti (ω_i, ω_j) alla quale si riferisce. La quantità costante M è il momento del sistema rispetto oll'elemento normale all'elemento risultante.

Supponiemo che siano eguali a zero le somme dei momenti dei coefficienti del sistema rispetto a due olementi ω_i, ω_j; sarà eguale a zero la somma dei momenti rispetto ad un elemento qualunque ω_k; si dirà allora di avere un sistema di elementi con annessi coefficienti che si *annullano scambievolmente*. Le condizioni per un tale sistema saranno espresse dall'equazioni

$$\Sigma \mu_i x_i = 0 \,, \qquad \Sigma \mu_i y_i = 0 \,. \tag{8}$$

In tel ceso la posizione dell'elemonto risultante è indeterminata; ogni elemento del sistema, con l'annesso coefficiente di segno mutato, sarà l'elemento risultante, con l'annesso coefficiente risultante, rispetto a tutti gli altri elementi del sistema, con i loro rispettivi coefficienti, come componenti.

Se $\mu = 0$, senza che siano verificete le condizioni (8), l'elemento risultante ω apparterrà alla coppie immaginaria oll'infinito, rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha\beta = 0 \,;$$

l'espressionc di M_k prenderà le forma $0 . \infty$, essendo $\mu = 0$, e $\operatorname{sen} \omega\omega_k = \infty$; tra le somme dei momenti reletive ad una coppia qualunque di elementi (ω_i, ω_j) si evrà la relazione espressa de $M = 0$.

Le formole precedenti si adatteranno al sistema di punti in lineo retta

(o in altri termini al sistema delle rette parallele in un piano, ed al sistema dei piani paralleli) ponendo in generale

$$\operatorname{sen}\omega_i\omega_j=\omega_i\omega_j\ ,\qquad \cos\omega_i\omega_j=1\ .$$

Se nel sistema di punti in linea retta si ha $\mu=\Sigma\mu_i=0$, senza che si abbiano le condizioni

$$\Sigma\mu_i x_i=0\ ,\qquad \Sigma\mu_i y_i=0\ ,$$

il punto risultante ω cadrà a distanza infinita, e sarà

$$M=\frac{M_\alpha-M_\beta}{\alpha\beta}=0\ ,\quad \text{onde}\quad M_\alpha=M_\beta\ ,$$

sicchè si avrà per un punto qualunque ω_i,

$$M_i=y_i M_\alpha+x_i M_\beta=\textit{costante}$$

essendo $x_i+y_i=1$.

2. Consideriamo ora un sistema di 2ª specie (sistema di rette e di piani concorrenti in un punto, al quale sostituiremo il sistema di punti e di archi di circoli massimi appartenenti ad una superficie sferica di raggio eguale all'unità). La posizione di un punto ω, e quella di un arco Ω, siano determinate rispetto alla terna fondamentale (abc, ABC) di punti e di archi dall'equazioni

$$x=\frac{\operatorname{sen}\omega A}{\operatorname{sen}aA}\ ,\quad y=\frac{\operatorname{sen}\omega B}{\operatorname{sen}bB}\ ,\quad z=\frac{\operatorname{sen}\omega C}{\operatorname{sen}cC}\ ,$$

$$X=\frac{\operatorname{sen}\Omega a}{\operatorname{sen}Aa}\ ,\quad Y=\frac{\operatorname{sen}\Omega b}{\operatorname{sen}Bb}\ ,\quad Z=\frac{\operatorname{sen}\Omega c}{\operatorname{sen}Cc}\ ;$$

essendo pel punto ω e per l'arco Ω del sistema (*)

$$\operatorname{sen}\omega\Omega=\frac{\operatorname{sen}\omega A\operatorname{sen}\Omega a}{\operatorname{sen}Aa}+\frac{\operatorname{sen}\omega B\operatorname{sen}\Omega b}{\operatorname{sen}Bb}+\frac{\operatorname{sen}\omega C\operatorname{sen}\Omega c}{\operatorname{sen}Cc}\ ,$$

(*) Nota sulle forme geometriche di 2ª specie. Rendiconto dell'Accademia 1865.

si avrà

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{sen}\omega_i\Omega_k = x_iX_k \operatorname{sen} aA + y_iY_k \operatorname{sen} bB + z_iZ_k \operatorname{sen} cC\,, \\ &\operatorname{sen}\Omega_i\omega_k = X_ix_k \operatorname{sen} Aa + Y_iy_k \operatorname{sen} Bb + Z_iz_k \operatorname{sen} Cc\,, \\ &\cos\omega_i\omega_j = x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j \\ &\quad + (y_iz_j + z_iy_j)\cos bc + (z_ix_j + x_iz_j)\cos ca + (x_iy_j + y_ix_j)\cos ab\,, \\ &\cos\Omega_i\Omega_j = X_iX_j + Y_iY_j + Z_iZ_j \\ &\quad + (Y_iZ_j + Z_iY_j)\cos BC + (Z_iX_j + X_iZ_j)\cos CA + (X_iY_j + Y_iX_j)\cos AB\,, \end{aligned}$$

e tra le coordinate (x, y, z) di ω, o pure tra le coordinate (X, Y, Z) di Ω, si avrà l'una o l'altra delle relazioni

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos bc + 2zx\cos ca + 2xy\cos ab = 1\,, \\ &X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos BC + 2ZX\cos CA + 2XY\cos AB = 1\,. \end{aligned}$$

Supponiamo annesso un coefficiente ad ogni punto e ad ogni arco del sistema; indicando con μ_i il coefficiente annesso al punto ω_i, o all'arco Ω_i, l'espressioni

$$M_{ik} = \mu_i \operatorname{sen}\omega_i\Omega_k = \mu_i(x_iX_k \operatorname{sen} aA + y_iY_k \operatorname{sen} bB + z_iZ_k \operatorname{sen} cC)\,,$$

$$m_{ik} = \mu_i \operatorname{sen}\Omega_i\omega_k = \mu_i(X_ix_k \operatorname{sen} Aa + Y_iy_k \operatorname{sen} Bb + Z_iz_k \operatorname{sen} Cc)\,,$$

si diranno rispettivamente il *momento del coefficiente* μ_i *rispetto all'arco* Ω_k, *o pure rispetto al punto* ω_k, e l'espressioni

$$M_k = \Sigma\mu_i \operatorname{sen}\omega_i\Omega_k = \Sigma\mu_i(x_iX_k \operatorname{sen} aA + y_iY_k \operatorname{sen} bB + z_iZ_k \operatorname{sen} cC)\,,$$

$$m_k = \Sigma\mu_i \operatorname{sen}\Omega_i\omega_k = \Sigma\mu_i(X_ix_k \operatorname{sen} Aa + Y_iy_k \operatorname{sen} Bb + Z_iz_k \operatorname{sen} Cc)\,,$$

in cui il Σ si estende a tutti i punti, o gli archi che si considerano nel sistema, saranno *le somme dei momenti dei coefficienti del sistema rispetto ad* Ω_k *o ad* ω_k.

Si ponga

$$\text{(2)}\qquad \mu x = \Sigma\mu_ix_i\,, \qquad \mu y = \Sigma\mu_iy_i\,, \qquad \mu z = \Sigma\mu_iz_i\,,$$

o pure

$$\text{(2)}\qquad \mu X = \Sigma\mu_iX_i\,, \qquad \mu Y = \Sigma\mu_iY_i\,, \qquad \mu Z = \Sigma\mu_iZ_i\,;$$

essendo

$$\mu^2 x^2 = \Sigma\mu_i^2 x_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j x_i x_j\,, \qquad \mu^2 yz = \Sigma\mu_i^2 y_i z_i + \Sigma\mu_i\mu_j (y_i z_j + z_i y_j)\,,$$

$$\mu^2 y^2 = \Sigma\mu_i^2 y_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j y_i y_j\,, \qquad \mu^2 zx = \Sigma\mu_i^2 z_i x_i + \Sigma\mu_i\mu_j (z_i x_j + x_i z_j)\,,$$

$$\mu^2 z^2 = \Sigma\mu_i^2 z_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j z_i z_j\,, \qquad \mu^2 xy = \Sigma\mu_i^2 x_i y_i + \Sigma\mu_i\mu_j (x_i y_j + y_i x_j)\,,$$

o pure

$$\mu^2 X^2 = \Sigma\mu_i^2 X_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j X_i X_j\,, \qquad \mu^2 YZ = \Sigma\mu_i^2 Y_i Z_i + \Sigma\mu_i\mu_j (Y_i Z_j + Z_i Y_j)\,,$$

$$\mu^2 Y^2 = \Sigma\mu_i^2 Y_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j Y_i Y_j\,, \qquad \mu^2 ZX = \Sigma\mu_i^2 Z_i X_i + \Sigma\mu_i\mu_j (Z_i X_j + X_i Z_j)\,,$$

$$\mu^2 Z^2 = \Sigma\mu_i^2 Z_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j Z_i Z_j\,, \qquad \mu^2 XY = \Sigma\mu_i^2 X_i Y_i + \Sigma\mu_i\mu_j (X_i Y_j + Y_i X_j)\,,$$

si avrà per le relazioni (1)

$$(3) \qquad \mu^2 = \Sigma\mu_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j \cos\omega_i\omega_j\,, \quad \text{o pure} \quad \mu^2 = \Sigma\mu_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j \cos\Omega_i\Omega_j\,.$$

Il valore di μ dato dall'una o dall'altra dell'equazioni (3) si dirà il coefficiente *risultante* del sistema, rispetto ai coefficienti μ_i (annessi a punti o ad archi) che ne saranno i coefficienti *componenti*.

Per le relazioni (2) l'espressioni di M_i e di m_i diventano

$$M_i = \mu(xX_i \operatorname{sen} aA + yY_i \operatorname{sen} bB + zZ_i \operatorname{sen} cC) = \mu \operatorname{sen} \omega\Omega_i\,,$$

$$m_i = \mu(Xx_i \operatorname{sen} Aa + Yy_i \operatorname{sen} Bb + Zz_i \operatorname{sen} Cc) = \mu \operatorname{sen} \Omega\omega_i\,,$$

sicchè supposto il coefficiente μ annesso al punto ω, o all'arco Ω, si avrà che *in un sistema di 2ª specie di punti o di archi, con annessi coefficienti, vi è sempre un punto o un arco col corrispondente coefficiente tale, che il suo momento, rispetto ad un arco o ad un punto qualunque del sistema, è eguale alla somma dei momenti degli altri dati coefficienti.* Si esprimerà questa proprietà dicendo che *il momento del coefficiente risultante* (rispetto ad un arco o ad un punto) *è eguale alla somma dei momenti dei coefficienti componenti.*

Il punto ω, o pure l'arco Ω, cui è annesso il coefficiente risultante si dirà il punto, o pure l'arco, *risultante.*

Per ogni arco Ω_i condotto per ω, o pure per ogni punto ω_i appartenente ad Ω, la somma M_i o m_i dei momenti dei coefficienti del sistema sarà eguale a zero.

Se pel sistema de' coefficienti μ'_i, annessi ai punti ω_i, il punto risultante ω è dato dalle formole

$$\mu' x = \Sigma \mu'_i x_i \,, \qquad \mu' y = \Sigma \mu'_i y_i \,, \qquad \mu' z = \Sigma \mu'_i z_i \,,$$

essendo μ' il coefficiente risultante, e se pel sistema di coefficienti μ''_j, annessi agli archi Ω_j, l'arco risultante Ω è dato dalle formole

$$\mu'' X = \Sigma \mu''_j X_j \,, \qquad \mu'' Y = \Sigma \mu''_j Y_j \,, \qquad \mu'' Z = \Sigma \mu''_j Z_j \,,$$

essendo μ'' il coefficiente risultante, si avrà

$$(4) \quad \mu'\mu'' \operatorname{sen} \omega\Omega = \mu'\mu''(xX \operatorname{sen} aA + yY \operatorname{sen} bB + zZ \operatorname{sen} cC) = \Sigma \mu'_i \mu''_j \operatorname{sen} \omega_i \Omega_j \,,$$

il Σ estendendosi a tutte le combinazioni di ciascun punto ω_i con ciascun arco Ω_j.

Similmente se ω', ω'', o puro Ω', Ω'', sono i punti o gli archi risultanti de' due sistemi di coefficienti μ'_i, μ''_j annessi ai punti ω'_i, ω''_j, o agli archi Ω'_i, Ω''_j, e che hanno per coefficienti risultanti μ' e μ'', sarà

$$(4) \quad \mu'\mu'' \cos \omega'\omega'' = \Sigma \mu'_i \mu''_j \cos \omega'_i \omega''_j \,, \quad \text{o pure} \quad \mu'\mu'' \cos \Omega'\Omega'' = \Sigma \mu'_i \mu''_j \cos \Omega'_i \Omega''_j \,,$$

Le quantità

$$\mu_\alpha = \mu x \,, \qquad \mu_\beta = \mu y \,, \qquad \mu_\gamma = \mu z \,,$$

o pure

$$\mu_\alpha = \mu X \,, \qquad \mu_\beta = \mu Y \,, \qquad \mu_\gamma = \mu Z \,,$$

sono i coefficienti *componenti* di μ (annesso al punto ω o all'arco Ω) annessi ai punti a, b, c, o pure agli archi A, B, C; tra il coefficiente *risultante* μ, ed i coefficienti componenti μ_α, μ_β, μ_γ si hanno le relazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \mu^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 + 2\mu_\beta\mu_\gamma \cos bc + 2\mu_\gamma\mu_\alpha \cos ca + 2\mu_\alpha\mu_\beta \cos ab, \\ \mu : \mu_\alpha : \mu_\beta : \mu_\gamma :: \operatorname{sen} abc : \operatorname{sen} \omega bc : \operatorname{sen} \omega ca : \operatorname{sen} \omega ab \,, \end{cases}$$

o pure

$$(5) \quad \begin{cases} \mu^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 + 2\mu_\beta\mu_\gamma \cos BC + 2\mu_\gamma\mu_\alpha \cos CA + 2\mu_\alpha\mu_\beta \cos AB \,, \\ \mu : \mu_\alpha : \mu_\beta : \mu_\gamma :: \operatorname{sen} ABC : \operatorname{sen} \Omega BC : \operatorname{sen} \Omega CA : \operatorname{sen} \Omega AB \,. \end{cases}$$

Le formole (2) dimostrano che per *comporre* più coefficienti basta *decomporre* ciascuno di essi (μ_i annesso ad ω_i o ad Ω_i) nei tre coefficienti

componenti ($\mu_i x_i$, $\mu_i y_i$, $\mu_i z_i$, o pure $\mu_i X_i$, $\mu_i Y_i$, $\mu_i Z_i$) annessi ai punti o agli archi fondamentali (a, b, c o A, B, C), prendere le sommo dei coefficienti annessi a ciascuno di questi punti o archi fondamentali, e comporre finalmente queste somme ($\Sigma\mu_i x_i = \mu_\alpha$, $\Sigma\mu_i y_i = \mu_\beta$, $\Sigma\mu_i z_i = \mu_\gamma$, o pure $\Sigma\mu_i X_i = \mu_\alpha$, $\Sigma\mu_i Y_i = \mu_\beta$, $\Sigma\mu_i Z_i = \mu_\gamma$) nel coefficiente risultante μ, per mezzo delle formolo (5), le quali determineranno il valore del coefficiente risultante, e la posizione del punto o dell'arco risultante.

È facile vedere ancora per le formole (2) che per comporre più coefficienti si possono prima distribuire in gruppi, poi comporre i coefficienti di ciascun gruppo, e finalmente comporre i coefficienti risultanti parziali dei diversi gruppi.

Facendo coincidere successivamente l'arco Ω_k con A, B, C, o pure il punto ω_k con a, b, c si avrà

$$M_\alpha = \mu x \operatorname{sen} aA\,, \qquad M_\beta = \mu y \operatorname{sen} bB\,, \qquad M_\gamma = \mu z \operatorname{sen} cC\,,$$

o pure

$$m_\alpha = \mu X \operatorname{sen} Aa\,, \qquad m_\beta = \mu Y \operatorname{sen} Bb\,, \qquad m_\gamma = \mu Z \operatorname{sen} Cc\,,$$

onde

$$M_k = X_k M_\alpha + Y_k M_\beta + Z_k M_\gamma\,, \qquad m_k = x_k m_\alpha + y_k m_\beta + z_k m_\gamma\,,$$

o sia

$$(6) \qquad \begin{aligned} M_k \operatorname{sen} ABC &= M_\alpha \operatorname{sen} \Omega_k BC + M_\beta \operatorname{sen} \Omega_k CA + M_\gamma \operatorname{sen} \Omega_k AB\,, \\ m_k \operatorname{sen} abc &= m_\alpha \operatorname{sen} \omega_k bc + m_\beta \operatorname{sen} \omega_k ca + m_\gamma \operatorname{sen} \omega_k ab\,, \end{aligned}$$

laonde conoscendo i momenti M_α, M_β, M_γ del sistema rispetto agli archi fondamentali A, B, C, o pure i momenti m_α, m_β, m_γ del sistema rispetto ai punti fondamentali a, b, c, si conoscerà per mezzo delle formole (6) il momento del sistema rispetto ad ogni altro arco Ω_k, o ad ogni altro punto ω_k.

Osservando che si ha in generale

$$\operatorname{sen} \Omega_h \Omega_i \Omega_j = \begin{vmatrix} X_h, Y_h, Z_h \\ X_i, Y_i, Z_i \\ X_j, Y_j, Z_j \end{vmatrix} \operatorname{sen} ABC\,, \quad \operatorname{sen} \omega_h \omega_i \omega_j = \begin{vmatrix} x_h, y_h, z_h \\ x_i, y_i, z_i \\ x_j, y_j, z_j \end{vmatrix} \operatorname{sen} abc\,,$$

si troverà

$$(6) \qquad \begin{aligned} M_k \operatorname{sen} \Omega_h \Omega_i \Omega_j &= M_h \operatorname{sen} \Omega_k \Omega_i \Omega_j + M_i \operatorname{sen} \Omega_k \Omega_j \Omega_h + M_j \operatorname{sen} \Omega_k \Omega_h \Omega_i\,, \\ m_k \operatorname{sen} \omega_h \omega_i \omega_j &= m_h \operatorname{sen} \omega_k \omega_i \omega_j + m_i \operatorname{sen} \omega_k \omega_j \omega_h + m_j \operatorname{sen} \omega_k \omega_h \omega_i\,, \end{aligned}$$

formole che danno le relazioni tra i momenti M_h, M_i, M_j, M_k, o pure m_h, m_i, m_j, m_k del sistema rispetto a quattro archi, o a quattro punti qualunque.

Se i tre archi Ω_h, Ω_i, Ω_j concorrono in uno stesso punto, o pure i tre punti ω_h, ω_i, ω_j appartengono ad uno stesso arco, essendo allora $\operatorname{sen}\Omega_h\Omega_i\Omega_j=0$, o pure $\operatorname{sen}\omega_h\omega_i\omega_j=0$, l'equazioni (6) si ridurranno ad

$$M_h \operatorname{sen}\Omega_i\Omega_j + M_i \operatorname{sen}\Omega_j\Omega_h + M_j \operatorname{sen}\Omega_h\Omega_i = 0\,,\quad m_h \operatorname{sen}\omega_i\omega_j + m_i \operatorname{sen}\omega_j\omega_h + m_j \operatorname{sen}\omega_h\omega_i = 0\,,$$

sicchè se sono eguali a zero le somme dei momenti dei coefficienti del sistema di punti o di archi rispetto a due archi Ω_i, Ω_j, o pure rispetto a due punti ω_i, ω_j, sarà eguale a zero la somma dei momenti rispetto ad ogni altro arco Ω_h condotto pel punto $\Omega_i\Omega_j$ (punto risultante), o pure rispetto ad ogni altro punto ω_h appartenente all'arco $\omega_i\omega_j$ (arco risultante).

Si avrà inoltre

$$(7)\qquad \begin{aligned} M^2 &= \frac{M_h^2}{\operatorname{sen}^2\omega_h\Omega_h} + \frac{M_i^2}{\operatorname{sen}^2\omega_i\Omega_i} + \frac{M_j^2}{\operatorname{sen}^2\omega_j\Omega_j} \\ &+ 2\,\frac{M_i M_j \cos\omega_i\omega_j}{\operatorname{sen}\omega_i\Omega_i \operatorname{sen}\omega_j\Omega_j} + 2\,\frac{M_j M_h \cos\omega_j\omega_h}{\operatorname{sen}\omega_j\Omega_j \operatorname{sen}\omega_h\Omega_h} + 2\,\frac{M_h M_i \cos\omega_h\omega_i}{\operatorname{sen}\omega_h\Omega_h \operatorname{sen}\omega_i\Omega_i} = \mu^2\,, \\ m^2 &= \frac{m_h^2}{\operatorname{sen}^2\Omega_h\omega_h} + \frac{m_i^2}{\operatorname{sen}^2\Omega_i\omega_i} + \frac{m_j^2}{\operatorname{sen}^2\Omega_j\omega_j} \\ &+ 2\,\frac{m_i m_j \cos\Omega_i\Omega_j}{\operatorname{sen}\Omega_i\omega_i \operatorname{sen}\Omega_j\omega_j} + 2\,\frac{m_j m_h \cos\Omega_j\Omega_h}{\operatorname{sen}\Omega_j\omega_j \operatorname{sen}\Omega_h\omega_h} + 2\,\frac{m_h m_i \cos\Omega_h\Omega_i}{\operatorname{sen}\Omega_h\omega_h \operatorname{sen}\Omega_i\omega_i} = \mu^2\,, \end{aligned}$$

sicchè la quantità M o m è costante, ed eguale al coefficiente risultante, qualunque sia la terna degli archi (Ω_h, Ω_i, Ω_j) o dei punti (ω_h, ω_i, ω_j) alla quale si riferisce. La quantità costante M è il momento del sistema rispetto all'arco che ha per polo il punto risultante, e la quantità costante m è il momento del sistema rispetto al punto che è il polo dell'arco risultante.

Supponiamo che siano eguali a zero le somme dei momenti dei coefficienti del sistema di punti, o pure di archi, rispetto a tre archi Ω_h, Ω_i, Ω_j, che non passano per lo stesso punto, o pure rispetto a tre punti ω_h, ω_i, ω_j non appartenenti allo stesso arco; sarà eguale a zero la somma dei momenti rispetto ad un arco qualunque Ω_k, o pure rispetto ad un punto qualunque ω_k, sarà quindi in tal caso il coefficiente risultante

μ eguale a zero; si dirà allora di avere un sistema di punti o di archi con annessi coefficienti, che si *annullano scambievolmente*. Le condizioni per un tale sistema saranno espresse dall'equazioni

$$(8)\quad \Sigma\mu_i x_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i y_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i z_i=0\,,\quad \text{o pure}\quad \Sigma\mu_i X_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i Y_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i Z_i=0\,,$$

secondo che il sistema è di punti o di archi.

In tal caso la posizione del punto o dell'arco risultante è indeterminata; ogni punto o pure ogni arco del sistema, con l'annesso coefficiente di segno mutato, sarà il punto o l'arco risultante, con l'annesso coefficiente risultante, rispetto a tutti gli altri punti o archi del sistema, con i loro rispettivi coefficienti, come componenti.

Se $\mu=0$, senza che siano verificate le condizioni (8), il punto risultante ω, o pure l'arco risultante Ω, apparterrà al luogo o inviluppo di 2° grado immaginario all'infinito (*) rappresentato dall'una o dall'altra dell'equazioni

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos bc+2zx\cos ca+2xy\cos ab=0\,,$$
$$X^2+Y^2+Z^2+2YZ\cos BC+2ZX\cos CA+2XY\cos AB=0\,;$$

l'espressioni di M_i e di m_i prenderanno la forma $0.\infty$, essendo $\mu=0$, e $\operatorname{sen}\omega\Omega_i=\operatorname{sen}\Omega\omega_i=\infty$; tra le somme dei momenti relative ad una terna qualunque di archi $(\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j)$, o di punti $(\omega_h, \omega_i, \omega_j)$ si avrà la relazione espressa da $M=0$, o pure da $m=0$.

Le formole precedenti si adatteranno al sistema di punti e di rette appartenenti ad uno stesso piano (o in altri termini al sistema di rette e di piani concorrenti in un punto all'infinito) ponendo in generale

$$\operatorname{sen}\omega\Omega=\omega\Omega\,,\quad \operatorname{sen}\omega_i\omega_j=\omega_i\omega_j\,,\quad \cos\omega_i\omega_j=1\,,$$
$$\operatorname{sen}\omega_h\omega_i\omega_j=\omega_h\Omega_h.\omega_i\omega_j=\omega_i\Omega_i.\omega_j\omega_h=\omega_j\Omega_j.\omega_h\omega_i\,,$$
$$\operatorname{sen}\Omega_h\Omega_i\Omega_j=\Omega_h\omega_h\operatorname{sen}\Omega_i\Omega_j=\Omega_i\omega_i\operatorname{sen}\Omega_j\Omega_h=\Omega_j\omega_j\operatorname{sen}\Omega_h\Omega_i\,.$$

Se nel sistema di punti appartenenti ad uno stesso piano si ha $\mu=\Sigma\mu_i=0$, senza che si abbiano le condizioni

$$\Sigma\mu_i x_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i y_i=0\,,\quad \Sigma\mu_i z_i=0\,,$$

(*) Nota citata.

il punto risultante ω cadrà all'infinito, e sarà

$$M = \frac{M_\alpha}{aA} + \frac{M_\beta}{bB} + \frac{M_\gamma}{cC} = 0\ ;$$

se poi nel sistema di rette appartenenti ad uno stesso piano si ha

$$\mu^2 = \Sigma\mu_i^2 + 2\Sigma\mu_i\mu_j \cos\Omega_i\Omega_j = 0\ ,$$

senza che si abbiano le condizioni

$$\Sigma\mu_i X_i = 0\ , \qquad \Sigma\mu_i Y_i = 0\ , \qquad \Sigma\mu_i Z_i = 0\ ,$$

la retta risultante Ω passerà per uno dei punti ciclici all'infinito, e sarà

$$m^2 = \frac{m_\alpha^2}{aA^2} + \frac{m_\beta^2}{bB^2} + \frac{m_\gamma^2}{cC^2}$$

$$+ 2\frac{m_\beta m_\gamma}{bB\,.\,cC}\cos BC + 2\frac{m_\gamma m_\alpha}{cC\,.\,aA}\cos CA + 2\frac{m_\alpha m_\beta}{aA\,.\,bB}\cos AB = 0\ ;$$

questa equazione, per le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo, è soddisfatta identicamente (e nel solo modo reale) allorchè $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma$; viceversa se queste equazioni sono verificate, sarà $\mu = 0$; in tal caso la retta risultante cadrà a distanza infinita, e si avrà per un punto qualunque ω_i

$$m_i = x_i m_\alpha + y_i m_\beta + z_i m_\gamma = costante\ ,$$

essendo $x_i + y_i + z_i = 1$.

Dei momenti nei sistemi di 3ª specie si tratterà in un'altra Nota.